Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

2º Examen Parcial (Tipo 1) (50 %)

MA-2112 Abril-Julio 2011

Soluciones.

1. Sea D la región del primer cuadrante delimitada por las curvas $y = 4 - |x-1|$, $y = |x^2 - 1|$, $x = 0$.

   a) Dibujar ∂D.

   b) Calcular la integral de línea $\int_{\partial D} xy\,dx \ + \ 2x\,dy$, con ∂D orientado positivamente.

   Solución:

   a) Comenzamos por estudiar las funciones involucradas:

$$4 - |x-1| = \begin{cases} 4-(1-x) = 3+x & \text{si} \quad x < 1 \\ 4-(x-1) = 5-x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

y

$$|x^2-1| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ x^2-1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases}$$

Los puntos donde las curvas se intersectan se hallan igualando:

$$\begin{aligned} 5 - x = x^2 - 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x+3)(x-2) = 0 \end{aligned}$$

tomamos $x = 2$ ya que la región D está contenida en el primer cuadrante. Dibujando, la trayectoria es la que aparece en la figura

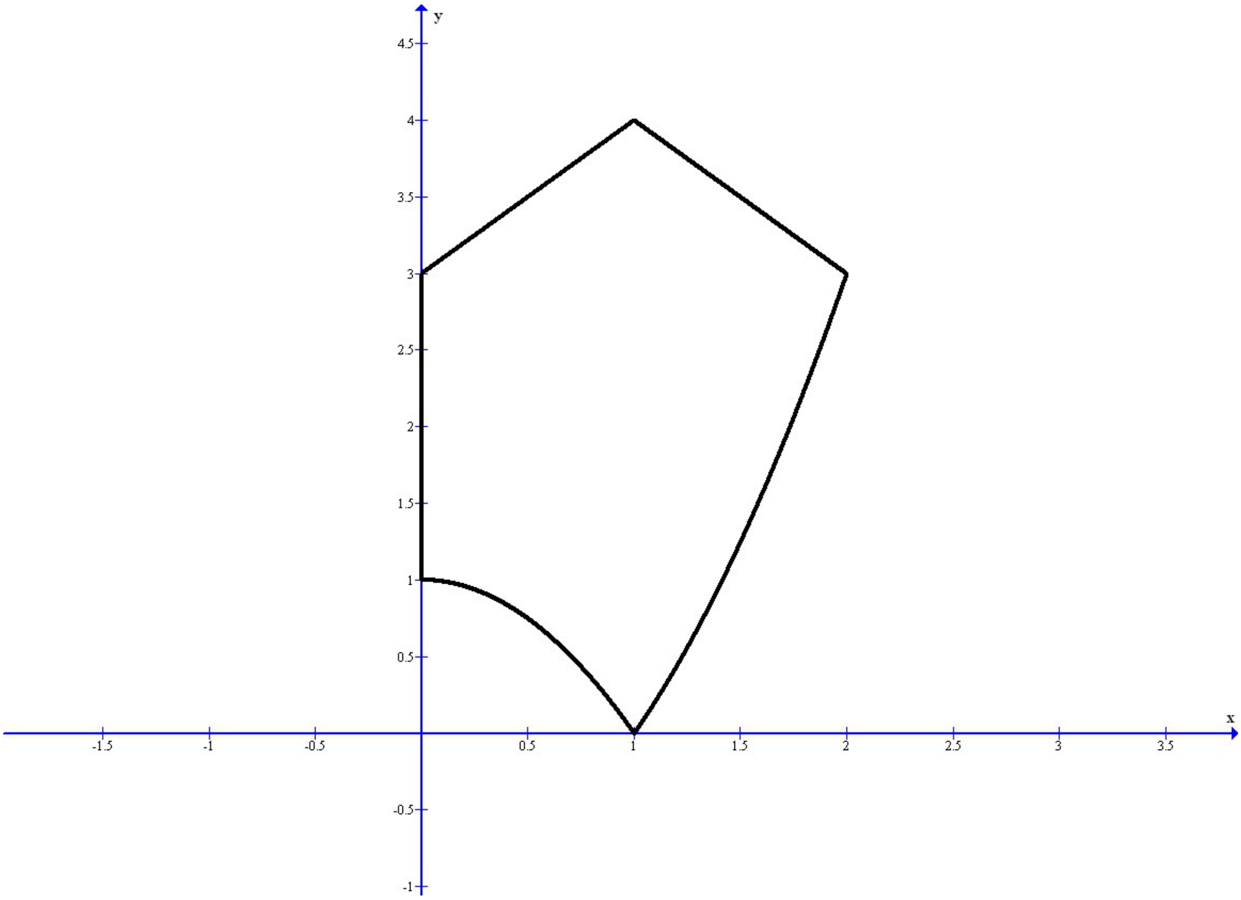

Figura 1: Trayectoria ∂D

b) El campo vectorial a integrar a lo largo de ∂D es $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ con $P(x, y) = xy$ y $Q(x, y) = 2x$. Hacer directamente la integral de línea supone parametrizar cinco trayectorias distintas e integrar sobre cada una de ellas. En cambio con el Teorema de Green puede hacerse calculando dos integrales dobles.

Teorema 1 (Green) *Sea D una región simple. Supongamos que $P, Q : D \longrightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1. Entonces*

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Dado que D es una unión de regiones simples y que P, Q son de clase C^1, las hipótesis del Teorema de Green se satisfacen. Por lo tanto:

$$\int\limits_{\partial D} xy\,dx + 2x\,dy = \iint\limits_{D} (2-x)\; dA$$

y la región sobre D se puede calcular usando dos integrales dobles:

$$\iint\limits_{D} (2-x)\; dA = \int_0^1 \int_{1-x^2}^{3+x} (2-x)\,dy\;dx + \int_1^2 \int_{x^2-1}^{5-x} (2-x)\,dy\;dx$$

la primera de ellas es:

$$\int_0^1 \int_{1-x^2}^{3+x} (2-x)\,dy\;dx = \int_0^1 (-x^3+x^2+4)\,dx = \frac{49}{12}$$

la segunda:

$$\int_1^2 \int_{x^2-1}^{5-x} (2-x)\,dy\;dx = \int_1^2 (x^3-x^2-8x+12)\,dx = \frac{17}{12}$$

sumando:

$$\iint\limits_{D} (2-x)\; dA = \frac{11}{2}$$

□

2. Calcular la integral usando un conveniente cambio de variables:

$$\iint\limits_{S} (x-y)^2\;\mathrm{sen}(x+y)\;dxdy$$

donde S es el paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ y $(0, \pi)$.

Solución: Para obtener $u = x - y$ y $v = x + y$ es necesario hacer el cambio

$$x = \frac{u+v}{2}; \quad y = \frac{v-u}{2}$$

Entonces:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{2}$$

de donde:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$$

aplicando el Teorema de cambio de variable para integrales dobles:

$$\iint\limits_{S} (x-y)^2 \operatorname{sen}(x+y)\, dxdy = \frac{1}{2} \iint\limits_{T^{-1}(S)} u^2 \operatorname{sen} v\, dudv$$

Donde T es la transformación lineal $T(u,v) = \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2}\right)$ (como es no singular, es invertible). Dado que T^{-1} es una transformación lineal, lleva paralelogramos en paralelogramos. Por lo tanto, basta con saber adónde lleva tres vértices del paralelogramo S: Como $T^{-1}(0,\pi) = (-\pi,\pi)$, $T^{-1}(\pi,0) = (\pi,\pi)$ y $T^{-1}(\pi,2\pi) = (-\pi,3\pi)$, un dibujo ayuda a darse cuenta de que $T^{-1}(S)$ es el rectángulo $[-\pi,\pi] \times [\pi,3\pi]$.

Entonces la integral es:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S} (x-y)^2 \operatorname{sen}(x+y)\, dxdy &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u^2 \operatorname{sen} v\, du\, dv \\
&= \frac{\pi^3}{3}\int_{\pi}^{3\pi} \operatorname{sen} v\, dv \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

3. Calcular la integral

$$\iiint\limits_{W} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

siendo W la región delimitada por $z^2 = x^2 + y^2$ y $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Solución:

Las superficies son: un cono cuyo eje de simetría coincide con el eje z y un cilindro cuyo eje de simetría coincide con la recta $x = 1$.

Se efectúa el cambio a coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\theta; \quad y = r\operatorname{sen}\theta; \quad z = z$$

con $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le r \le 2\cos\theta$ y $-r \le z \le r$. El determinante jacobiano $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}$

es igual a r. Por lo tanto la integral se transforma en:

$$\iiint\limits_{W^*} r \ \mathrm{d}V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\cos\theta} \int_{-r}^{r} r \quad \mathrm{d}z\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\cos\theta} 2r^2 \ \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^4}{3} \cos^3\theta \ \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{64}{9}$$

$\square$

4. Para la integral:

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} xy^3\, dy\, dx$$

a) Esbozar la región de integración.

b) Cambiar el orden de integración y calcular la integral.

Solución:

a) La región de integración es el área sombreada en la figura 2

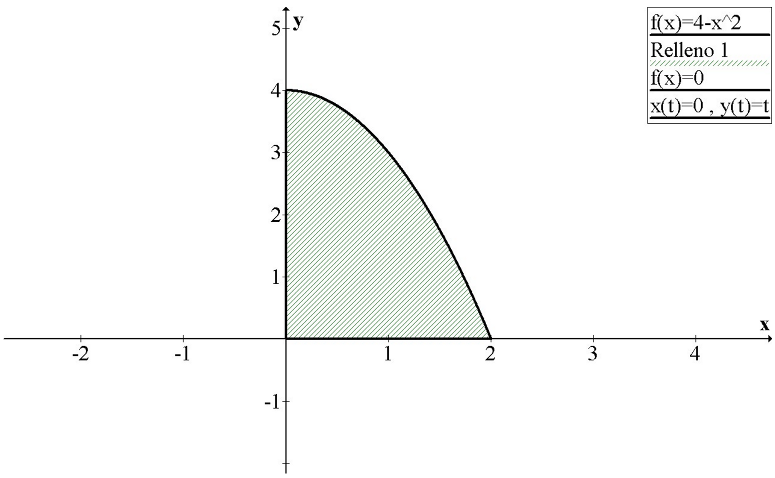

Figura 2: Región de integración

b) Como R es también una región x-simple, despejamos x en función de y en la ecuación $y = 4 - x^2$ y obtenemos: $x = \pm\sqrt{4-y}$. Dado que $x \geq 0$, escojemos la rama positiva y por tanto $x = \sqrt{4-y}$ con $0 \leq y \leq 4$. Así, la integral con el orden de integración cambiado es:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} xy^3 \, dx \, dy &= \frac{1}{2}\int_0^4 (4y^3 - y^4) \, dy \\ &= \frac{128}{5} \end{aligned}$$

$\square$